

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ НАУКИ

О.Ю.ОСИПЕНКОВА, Ю.А.ОБОЛЕНСКАЯ

ПРОБЛЕМА ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ ДИСКРЕТНОГО ДЕЛЬТА-ХЕДЖИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК

Актуальность представленной работы определяется тем, что в современной практике для большинства трейдеров хеджирование – это способ уменьшить чувствительность своего инвестиционного портфеля к непредвиденным изменениям стоимости базового актива. Реализуется это просто – путем занятия противоположных друг другу позиций с применением разных финансовых инструментов. Целью данной работы является анализ методик выбора момента ребалансировки портфеля опционов для восстановления нейтральности. Обоснована оптимальность ребалансировки портфеля при изменении цены акции на фиксированную величину в процентах.

Ключевые слова: дельта-хеджирование, транзакционные издержки, акция, опционы, ребалансировка портфеля, метод Монте-Карло.

Одним из ключевых вопросов рынка деривативов является вопрос справедливой цены опционов – производных инструментов с нелинейной функцией выплат.

Главной идеей решения этой задачи, предложенного в 1973 году Ф.Блэком и М.Шоулзом ([1]) для стандартных европейских опционов «колл» и «пут», является построение «захеджированного» портфеля (англ. «*hedge*» – ограда), состоящего из базового актива и опциона. Согласно предложенной авторами стратегии, этот портфель непрерывно модифицируется (путем покупки или продажи базисного актива) так, чтобы стоимость портфеля в текущей точке не зависела от цены базового актива.

Такой алгоритм называется *дельта-хеджированием*, так как количество единиц базисного актива выбирается равным минус производной стоимости опциона по цене базового актива, стандартно обозначаемой греческой буквой «дельта» [2], [3]. Очевидно, что в этом случае суммарная дельта портфеля оказывается нулевой («дельта-нейтральность» портфеля), что и соответствует (локальной) независимости его стоимости от цены базового актива.

В доказательстве этого результата [1] есть

две удобных (для математических расчетов) гипотезы, которые невозможно реализовать при реальной торговле. А именно, считается, что операции с базовым активом можно проводить, во-первых, непрерывно, а во-вторых, без транзакционных издержек. Так как ни одно из этих предположений не является практически осуществимым, при управлении реальным портфелем опционов возникает выходящий за рамки теории вопрос: по какому правилу оптимально выбирать моменты ребалансировки портфеля с целью восстановления дельта-нейтральности за счет покупки или продажи базового актива.

В настоящем исследовании сделаны следующие предположения:

1) Базовым активом является акция с начальной ценой $S_0=100$ рублей, цена которой следует геометрическому броуновскому движению с годовой волатильностью (стандартным отклонением) 30% и математическим ожиданием 0 (при этом, согласно [1], математическое ожидание на стоимость хеджирования не влияет). Безрисковая процентная ставка взята равной 8.5%.

2) Хеджируется 1000 опционов «колл» с це-

ной страйк K , равной начальной цене S_0 , и временем до экспирации $T=3$ месяца (63 рабочих дня). Опционы на начало срока стоят 5853 рубля, а их дельта эквивалентна 519 акциям.

3) Можно купить или продать любое дробное количество акций, при этом транзакционные издержки равны $0.001 \cdot (\text{объем операции})$.

Моделирование осуществляется методом Монте-Карло. А именно, генерируется $N=10000$ траекторий цены акции с шагом генерации 10 минут. Торговый день взят равным 7 часам. Таким образом, каждая траектория состоит из $(60/10) \cdot 7 \cdot 63 = 2646$ шагов.

Были проанализированы четыре стратегии дельта-хеджирования, предполагающие ребалансировку портфеля, соответственно:

- i) с определенным постоянным шагом по времени;
- ii) при изменении стоимости портфеля на фиксированную величину;
- iii) при изменении цены акции на фиксированную величину в процентах;
- iv) при изменении дельты портфеля на фиксированную величину.

Ключевым вопросом исследования являются критерии, согласно которым стратегии сравниваются друг с другом.

Из доказательства формулы Блэка-Шоулза следует, что при хеджировании в непрерывном времени финансовый результат от операций с акцией после погашения опциона в точности равен цене опциона на начало периода хеджирования. В случае дискретного хеджирования без транзакционных издержек аналогичное равенство имеет место в среднем по большому числу траекторий.

При этом очевидно, что чем реже осуществляется хеджирование, тем больший разброс результатов вокруг среднего значения будет наблюдаться. Поэтому логичной статистической характеристикой качества хеджа является дисперсия финансового результата или корень из нее (стандартное отклонение). Чем эта характеристика меньше – тем хедж лучше.

С другой стороны, чем чаще хеджируется портфель, тем больше будет суммарный объем операций с акциями, а значит, и плата за транзакционные издержки. При этом, взяв математическое ожидание по всем траекториям, мож-

но получить оценку средней стоимости данной стратегии.

Таким образом, каждая стратегия может быть описана точкой на диаграмме «цена» – «качество», где в нашем случае роль цены играют транзакционные издержки, а качества – стандартное отклонение хеджа.

С целью наиболее полного и объективного сравнения стратегий, для каждой из них было выбрано 10 различных значений параметров, описанных в пунктах i-iv выше. Результаты тестов приведены на *рис. 1*.

Как видно из *рис. 1*, точки, соответствующие стратегии “ii” (портфель выравнивается при относительном изменении цены акции на фиксированную величину в процентах), лежат левее, чем точки других стратегий. Это означает, что, при одинаковых затратах на стратегию, управление позицией по цене акции позволяет наилучшим образом снизить выраженный в терминах стандартного отклонения риск. Также показательно, что наиболее очевидная и интуитивно понятная стратегия хеджирования с фиксированным шагом по времени оказывается наихудшей из всех протестированных, причем транзакционные издержки, связанные с ее реализацией, оказываются на 30-40% выше, чем для хеджирования по цене акции с тем же уровнем риска.

Рис.1 позволяет сравнить друг с другом только итоговый результат стратегий, но не описывает их статистических свойств в течение периода жизни опциона.

С целью изучения последнего вопроса, на *рис. 2* приведены данные о накоплении дисперсии финансового результата и транзакционных издержек до срока экспирации.

Из графиков хорошо видно, что исследуемые стратегии функционируют по-разному.

Так, по мере приближения к экспирации, стратегии хеджирования по стоимости портфеля и дельте имеют постоянную скорость накопления ошибки, с одновременным увеличением скорости роста издержек.

Вместо этого, в случае выравнивания дельты по времени и цене акции, наблюдается постоянство прироста транзакционных расходов за счет ухудшения «качества» хеджирования при малых сроках до экспирации.

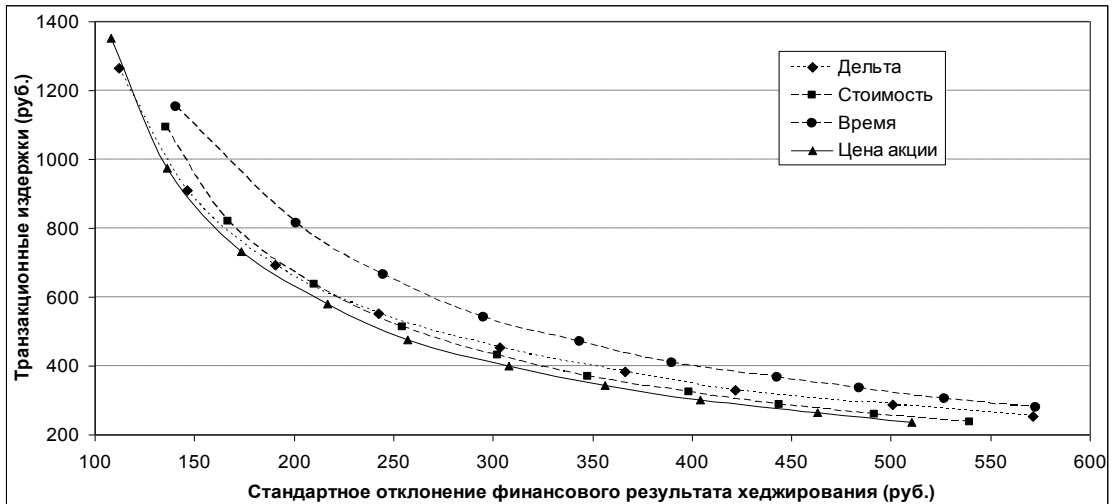


Рис. 1. Транзакционные издержки и стандартное отклонение стратегий дельта-хеджирования

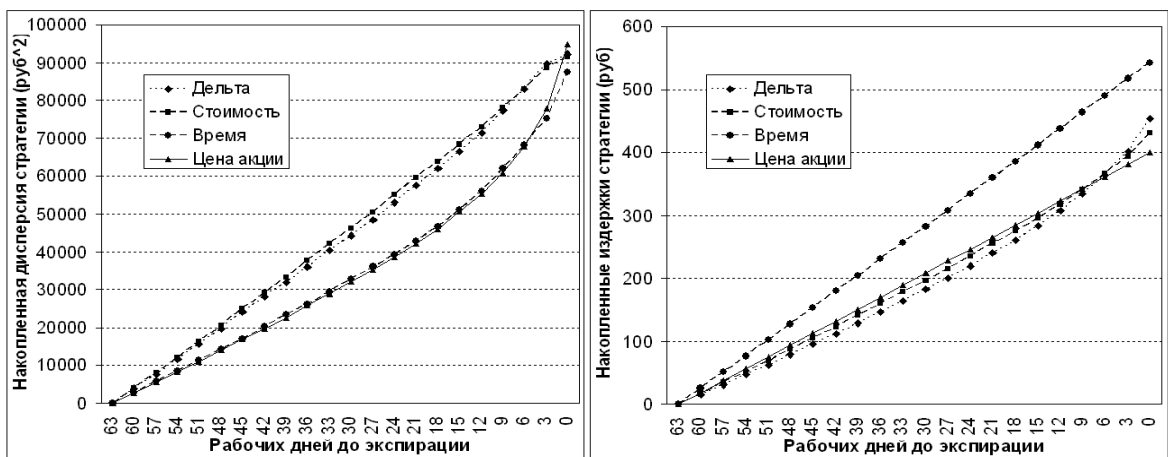


Рис. 2. Накопление дисперсии результата и транзакционных издержек за время жизни опциона

Следующим шагом является рассмотрение для каждой стратегии некоторого агрегатного показателя, имеющего смысл платы за риск.

В качестве такой характеристики был введен показатель «цена ошибки хеджирования», определяемый как произведение корня из прироста дисперсии за некоторый фиксированный срок (в исследовании он взят равным 3-м дням) на прирост издержек за тот же период.

Замечательным наблюдением, полученным в результате наших тестов, стал факт, что для каждой из стратегий «цена ошибки» оказывается постоянной при изменении параметра хеджирования в достаточно широком диапазоне.

Этот факт проиллюстрирован на рис. 3 на

примере хеджа по процентному изменению цены акции. «Цена ошибки» оказывается зависящей от времени до экспирации, но для каждого момента практически не меняется при варьировании параметра хеджирования (в случае рис. 3 – процентного изменения цены акции, после которой проводится ребалансировка портфеля).

В настоящей работе был исследована важная и актуальная с практической точки зрения проблема оптимальной стратегии дискретного дельта-хеджирования портфеля при наличии транзакционных издержек.

Так как подобная формулировка задачи выпадает за рамки стандартных теоретических

предположений, исследование проводилось путем множественной генерации траектории базового процесса (метод Монте-Карло).

Эффективность стратегии оценивалась по соотношению стандартного отклонения и транзакционных издержек.

В ходе исследования были получены следующие результаты:

1) Среди исследованных стратегий оптимальной оказалась ребалансировка портфеля при изменении цены акции на фиксированную величину в процентах.

2) Заметно хуже остальных проявило себя

хеджирование с постоянным шагом по времени.

3) Часть исследованных стратегий (по времени и цене акции) обеспечивает постоянный уровень роста затрат на фоне ухудшения качества хеджа, тогда как другая часть (по стоимости портфеля и дельте) – постоянство качества хеджа при увеличивающейся затратах.

4) Величина «цены ошибки» хеджирования является постоянной для каждой из стратегий в широком диапазоне изменения параметра.

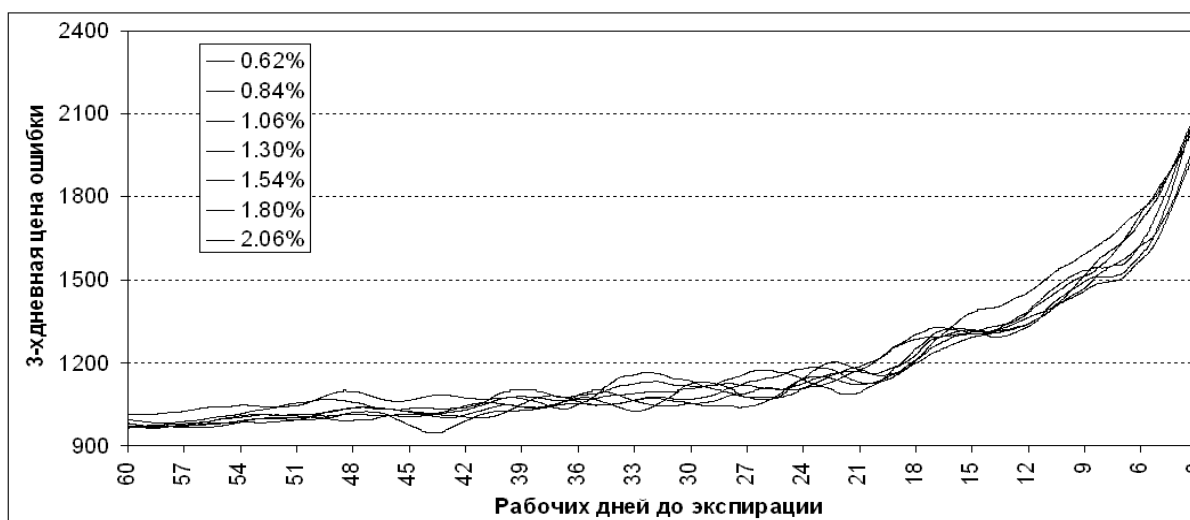


Рис. 3. «Цена ошибки» как функция времени для хеджирования с ребалансировкой портфеля по цене акции. В легенде отражены различные значения параметра – процентного изменения цены акции. Кривые намеренно оформлены одинаково, чтобы подчеркнуть практическое отсутствие различий.

Литература:

1. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 1973, V.81, №3, P. 637-659.
 2. Натенберг, Шелдон Опционы. Волатильность и оценка стоимости. Стратегии и методы

опционной торговли / Шелдон Натенберг. М., Альпина Паблишер, 2018. 541 с.
 3. Халл Дж. К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты, 6-е издание. М., Вильямс, 2013, 1056 с.

THE PROBLEM OF THE OPTIMAL STRATEGY FOR DISCRETE DELTA-HEDGING OF THE PORTFOLIO IN THE PRESENCE OF TRANSACTIONAL COSTS

[PROBLEMA OPTIMALNOY STRATEGII DISKRETNOGO DELTA-KHEDZHIROVANIYA PORTFELYA PRI NALICHII TRANAKTSIONNYKH IZDERZHEK]

Olga OSIPENKOVA

Doctor of Economic Sciences, Professor; Catherine the Great National Institute; 105187, Moscow, Shcherbakovskaya, 54; e-mail: osipenalex@rambler.ru

Julia OBOLENSKAYA

Candidate of Economic Sciences, Assistant Professor; Catherine the Great National Institute; 105187, Moscow, Shcherbakovskaya, 54; e-mail: oua131@rambler.ru

KEYWORDS:

delta-hedging, transaction costs, stock, options, rebalancing of the portfolio, Monte Carlo method.

ABSTRACT:

The relevance of the presented work is determined by the fact that in modern practice for most traders, hedging is a way to reduce the sensitivity of its investment portfolio to unforeseen changes of the price of the underlying asset. This is realized simply by taking opposite positions with different financial instruments. The purpose of this work is to analyze the methods for choosing the moment of rebalancing the options portfolio for restoring neutrality. The optimality of rebalancing the portfolio is substantiated when the share price changes by a fixed amount in percent.

REFERENCES:

Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. – Journal of Political Economy. 1973, vol. 81, №3, pp. 637-659.

Natenberg S. Options. Volatilnost i otsenka stoimosti. Strategii i metody optsiionnoy trgovli. [Volatility and valuation. Strategies and methods of option trading.] – M., Alpina Publisher, 2018. 541 p.

Hull J.K. Optsiony, fyuchersy i drugiye proizvodnyye finansovyye instrument. [Options, futures and other derivative financial instruments.]. – Moscow, Williams, 2013, 1056 p.